Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

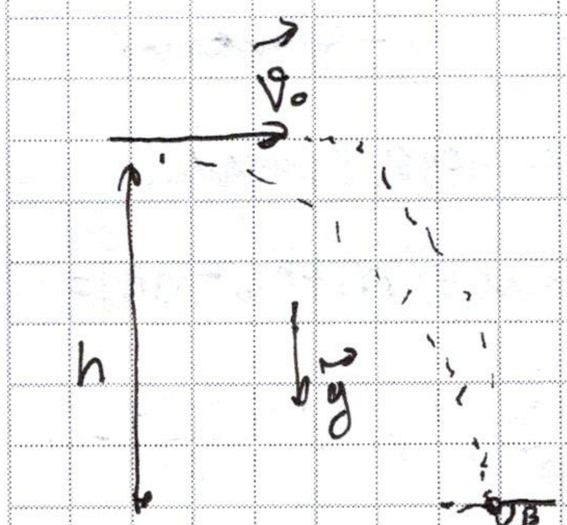
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 3

Задача №1

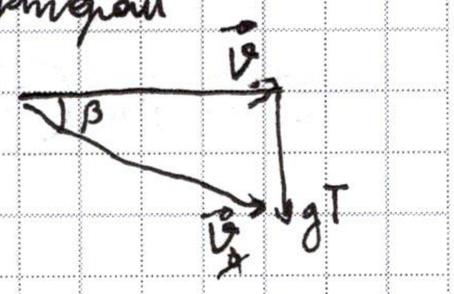


1.) Найдем время падения, T. По уравнению движения $\frac{gT^2}{2} = H \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ (0)

2.) По ВСВ ϑ_0 - начальная скорость, ϑ - конечная, тогда проекция скоростей на ось OX неизменна $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vartheta\cos\beta = \vartheta_0$ (1), тут β - угол между OX и вектором конечной скорости.

$\vartheta\sin\beta = gT$ (2)



3.) По ЗСЭ: $\frac{m\vartheta_0^2}{2} + mgh = \frac{m\vartheta^2}{2} \Rightarrow \vartheta^2 = \vartheta_0^2 + 2gh$ (3).

4.) Пусть a - среднее тангенциальное ускорение, тогда 0,75a - конечное тангенциальное ускорение, тогда 0,75a - это ускорение равно проекции вектора ускорения свободного падения на направление скорости $\Rightarrow g\sin\beta = 0{,}75a$ (4).

5.) $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \Rightarrow \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{3g}{4a}\right)^2 = 1$ (из урав (1) и (3)), при этом по уравнению движения: $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta_0} + \vec{a}T \Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 + aT$ (5) Одновременно из (2):

$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_0^2 + 2gh} + \frac{g(\sqrt{\vartheta_0^2 + 2gh} - \vartheta_0)^2}{16T^2g^2} = 1 \Rightarrow \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_0^2 + 2gh} + \frac{g(\sqrt{\vartheta_0^2 + 2gh} - \vartheta_0)^2}{32gH} = 1$ (подставим (0))

Заменим $\frac{\vartheta_0^2}{2gh} = t \Rightarrow \frac{t}{t+1} + \frac{g(\sqrt{t+1} - \sqrt{t})^2}{16} = 1 \Rightarrow 16t - 16 + g(t+1)(t+1+t-2\sqrt{t}\sqrt{t+1}) =$

$\neq 0 \Rightarrow$ (2) $\div$ (4) $\Rightarrow \frac{gT}{\vartheta} = \frac{3g}{4g} \rightarrow$ (5) $\Rightarrow 3\vartheta^2 - 3\vartheta\vartheta_0 - 4g^2T^2 = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{3+\sqrt{9}}{2}\vartheta_0 \Rightarrow$

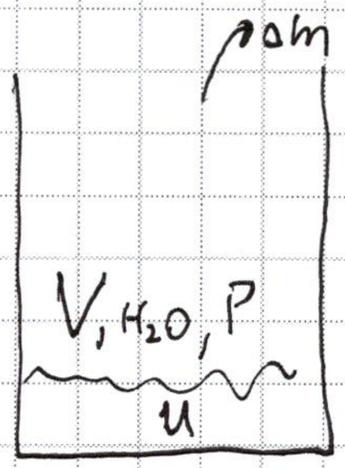
$\rightarrow$ (3), (0)

Можно использовать оборот листа для записи решений

$\Rightarrow 3V_0^2 + 6gH + 3\sqrt{V_0^2 + 2gH}\,V_0 - 8gH = 0 \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{4gH}{35}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 40}{35}} \approx 7{,}3$ м/с

Ответ: 7,3 м/с

Задача №2



μ-молярная масса воды

1) Температура не меняется $\Rightarrow$ давление насыщенного пара постоянно. Ввиду того, что давление уменьшилось, вся вода превратилась в пар. Пусть изначально вода имела объем U, тогда, пар занимает объем $V - U \Rightarrow$ по уравнению Менделеева-Клапейрона: $P(V-U) = \frac{m}{\mu} RT$.

Изначально пар насыщенный (есть вода на дне), $P = 10^5$ Па $\Rightarrow T = 373$ К.

В конце воды нет $\Rightarrow \frac{P}{2} V = \frac{m_\phi}{\mu} RT$, m_ϕ - осталось воды, масса оставшегося пара. $U = \frac{m_0}{\rho}$, где m_0 - масса воды в начале, ρ - плотность воды. Масса воды никуда не пропадала $\Rightarrow m + m_0 - \Delta m = m_1$.

Получаем:

$$\begin{cases} P\left(V - \frac{m_0}{\rho}\right) = \frac{m}{\mu} RT \\ \frac{P}{2} V = \frac{m + m_0 - \Delta m}{\mu} RT \end{cases} \Rightarrow -PV + \frac{Pm_0}{\rho} + \frac{P}{2}V = \frac{m + m_0 - \Delta m - m}{\mu} \cdot RT \Rightarrow$$

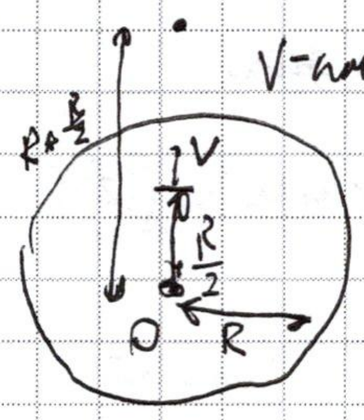
$$\Rightarrow m_0\left(\frac{P}{\rho} - \frac{RT}{\mu}\right) = \frac{PV}{2} - \frac{\Delta m RT}{\mu} \Rightarrow m_0 = \frac{\frac{PV}{2} - \frac{\Delta m RT}{\mu}}{\frac{P}{\rho} - \frac{RT}{\mu}} = \frac{\frac{10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2} - \frac{3{,}55 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 373}{18 \cdot 10^{-3}}}{\frac{10^5}{1000} - \frac{8{,}31 \cdot 373}{18 \cdot 10^{-3}}} =$$

$$\approx 2{,}1 \cdot 10^{-3}. \Rightarrow m = \frac{RPV}{\mu} \qquad m + m_0 = \frac{\mu PV}{2RT} + \Delta m = \frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31 \cdot 373} + 3{,}55 \cdot 10^{-3} =$$

$$\approx 5 \cdot 10^{-3} = 5_2$$

Ответ: 52

Задача №3



1.) Будем считать, что скважина узкая, тогда при движении по ней, ракета, будет притягиваться к шару, который расположен прямо под ней. (Если ракета на расстоянии $r < R$, тогда она притягивается к шару, радиуса r, который касается её.). Пусть ракета расположена на расстоянии

r от центра планеты, тогда масса, к которой он притягивается, $\mu = \frac{M}{R^3} \cdot r^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{притяж} = G\frac{m\mu}{r^2} = G\frac{mMr}{R^3}$, здесь m - масса ракеты, M - масса планеты,

тогда работа силы притяжения для вылета с планеты, $A_1 = -\int_R^{\frac{R}{2}} \frac{GmMr}{R^3} dr = -\frac{GmM}{R^3}\int_R^{\frac{R}{2}} r\,dr = -\frac{GmM}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2^2 \cdot 2}\right) =$

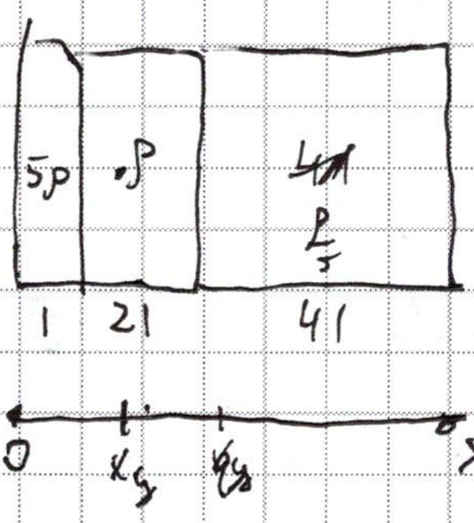
$= -\frac{3mMG}{8R}$, при этом $W_{пот} = G\frac{mM}{R} = \frac{mV_1^2}{2}$, $W_k = G\frac{mM}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2}$ ($W_{пот}$ - энергия на поверхности, W_k - энергия на высоте $\frac{R}{2}$ от поверх.).

По ЗСЭ: $\frac{mV^2}{2} + A_1 + W_{пот} = -W_k \Rightarrow \frac{mV^2}{2} = -\frac{2GmM}{3R} + \frac{GMm}{R} + \frac{3MG}{8R} =$

$= G\frac{mM}{R}\left(\frac{17}{24}\right) = \frac{17}{24} \cdot \frac{mV_1^2}{2} \Rightarrow V = V_1\sqrt{\frac{17}{48}} = \frac{V_1}{4}\cdot\sqrt{\frac{17}{3}} \approx \frac{360}{41}\cdot\sqrt{\frac{17}{3}} \approx 214$ м/с

Ответ: 214 м/с

Задача №4



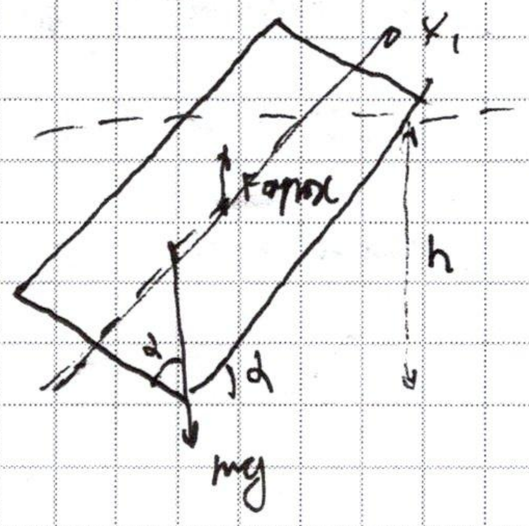
1.) Найдем координату центра масс заготовки.

~~Ввиду симметрии цилиндра, у~~ Центр масс лежит на оси симметрии диска. Центр масс каждого с одной ρ отдельного слоя лежит на середине оси этого слоя $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_y \cdot (5\rho|1 + 2\rho|1 + 41 \cdot \frac{\rho}{5}) = \frac{1}{2}\cdot 5\rho|1 + \frac{3}{2}|\cdot 2\rho|1 + 41\cdot\frac{\rho}{5}\cdot 51 \Rightarrow$

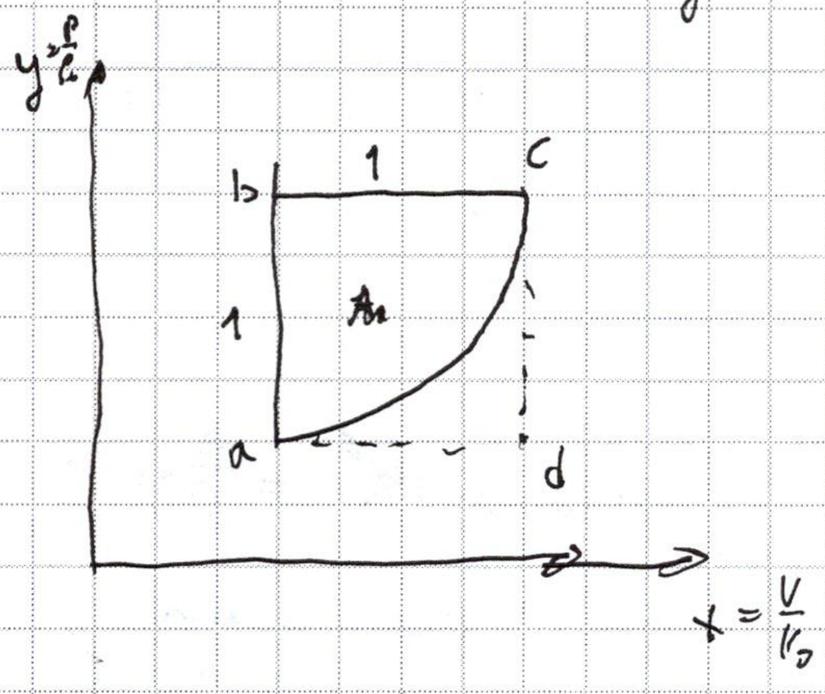
$\Rightarrow x_y = \frac{2,5 + 4 + 4}{7,8}1 = \frac{10,5}{7,8}1$. 2.) ~~Крайним положением~~ заготовки

~~Является~~ Заготовка находится в крайнем положении тогда, когда вектор её массы направлен по оси. Если $F_{тяж}$ при этом расположено правее mg по оси X_1, то заготовка встанет вертикально.



R - радиус сосуда, тогда $F_{тяж}$ при этом должно быть R - радиус сосуда, α - углом между mg и основанием. 1б) Заметим, что $F_{тяж}$ максимальная меньше mg. $F_{тяж\,max} = 7|1 \cdot 5g$, $mg = 7,8|5 \cdot g$. $M_{F_{тяж}} > M_{mg}$ всегда

Задача №5



1.) ~~Ф-ла ур-ия Менделеева-Клапейрона:~~

~~$pdV + Vdp = \nu R dT$~~

2.) ~~1-й закон термодинамики:~~ dU - изменение внутренней энергии газа ~~за цикл~~ от A до C =

$CdT = pdV + \nu C_V dT$ $= \Delta U$, $S_{abCd} = 1$

~~$S_{ABCA} = \frac{\pi}{4}$~~ $\Rightarrow A_{ц}$ - полезная работа

цикла abC, $A_{abC} = \frac{\pi}{4} P_0 V_0$, Полученная энергия цикла, $Q_+ = \Delta U + A_y$, A_y -

$= (V_c - V_b) P_b + \frac{3}{2}(P_b - P_A) V_A + \frac{3}{2}(P_0 V_0 - P_A V_A)$ полная работа, тогда

$A_{ABCD} = S_{abCd} \cdot P_0 V_0 = P_0 V_0$,

$A_{ц} = A_{abCd} - A_{ACd} = A_{abCD} - A_{abC} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) P_0 V_0$ (A_{abCd} - работа внутри abCd, A_{ACD} - работа внутри ACD). Полученная энергия в процессе

acd, $Q_{+1} = Q_-$ (энергия отданная циклом abC) $= Q_+ - A_{abC}$, $\eta = \frac{A_{abC}}{Q_+} \Rightarrow$

$\Rightarrow Q_+ - Q_{+1} = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) A_{abC} = \frac{1-\eta}{\eta} \cdot \frac{\pi_0}{4} \cdot P_0 V_0 \Rightarrow \eta_1$ КПД $= \frac{A_{acd}}{Q_{+1}} = \frac{\left(1 - \frac{\pi_0}{4}\right) P_0 V_0}{\frac{1-\eta}{\eta} \cdot \frac{\pi}{4} P_0 V_0} =$

$= \frac{\eta(4-\pi)}{\pi(1-\eta)}$, здесь η_1 - КПД цикла a-C-d-a. $\eta_2 = \frac{A_{abCd}}{Q_+} = \frac{P_0 V_0}{A_{abC}} = \frac{\eta P_0 V_0}{\frac{\pi}{4} P_0 V_0} =$

$= \frac{4\eta}{\pi}$, η_2 - КПД цикла abCd.

2.) $\eta = \frac{A_{abC}}{Q_+} = \frac{A_{KBC}}{\Delta U + A_y}$; $\Delta U = \frac{3}{2}(P_C V_C - P_A V_A)$, $A_y = (P_C + P_0) \cdot P_C (V_b - V_a) = P_C V_0 =$

$\Delta U = \frac{3}{2} = (P_a + P_0) V_0$; $\Delta U = \frac{3}{2}\left((P_a + P_0)(V_a + V_b) + P_A V_A\right) = \frac{3}{2}(P_A V_0 + P_0 V_A + P_0 V_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta = \frac{\frac{\pi}{4} P_0 V_0}{(P_A + P_0) V_0 + \frac{3}{2}(P_A V_0 + P_0 V_A + P_0 V_0)} = \frac{\pi}{4\left(\frac{5}{2}\frac{P_a}{P_0} + \frac{3}{2}\frac{V_A}{V_0} + \frac{5}{2}\right)}$. P_A растет $\Rightarrow \eta$ уменьшается,

P_A растет $\Rightarrow \eta$ уменьшается) $\Rightarrow P_A = 0$; $V_A = 0 \Rightarrow \eta_{max} = \frac{\pi}{4\left(\frac{5}{2}\right)}$. $\approx 31{,}4\%$.

$\cdot 100\% = 31{,}4\%$

Ответ: 1.) a-C-d-a $= \frac{\eta(4-\pi)}{\pi(1-\eta)}$; abCda $= \frac{4\eta}{\pi}$ 2.) 31,4 %.

Задача №6

1.) m_1 - масса бруска 1; m_2 - масса бруска 2. N_1 - сила реакции опоры бруска 1, N_2 - сила реакции опоры бруска 2. N_2' - сила реакции опоры бруска 2 в пункте 2; N_1' - сила реакции опоры бруска 1 в пункте 2.

olymp.bmstu.ru

Запишем 2 ЗН на оси, перпендикулярные соответствующие им опорам, на которых стоят бруски.

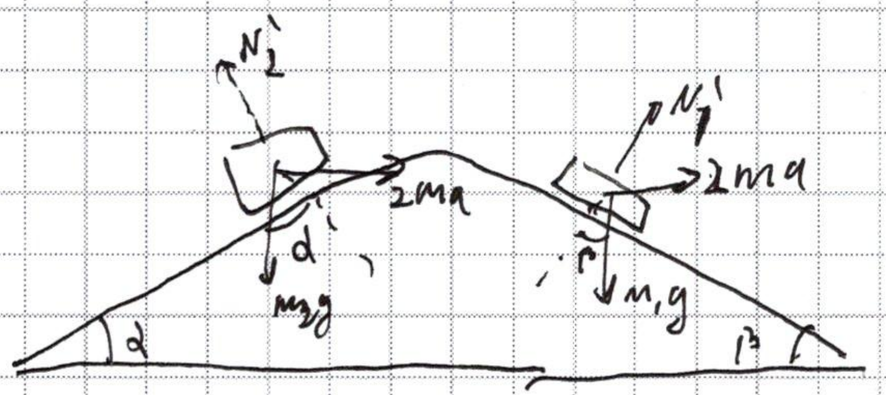


$\begin{cases} m_1 g \cos\alpha = N_1 \\ m_2 g \cos\beta = N_2 \end{cases}$. 2ЗН на горизонт

для горки: $N_2 \sin\beta = N_1 \sin\alpha$ (силы, с которыми бруски действуют на ~~бруски~~ горку равны силе, с которой горка действует на бруски по 3ЗН) $\Rightarrow$ $m_1 g \cos\alpha \sin\alpha = m_2 g \sin\beta \cos\beta \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\sin\beta \cos\beta} =$

$= m \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} m}{2} \approx 0{,}87\, m$

2.) Пусть это ускорение равно a. $m_2 < m_1 \Rightarrow$ если положить m_2 и m_1 местами, то горка начнет движение влево. Перейдем в с.о горки, тогда получаем:



Сила инерции $= 2ma$.

Запишем уравнения аналогично пункту 1:

$\begin{cases} m_2 g \cos\alpha + 2ma \sin\alpha = N_2' \\ m_1 g \cos\beta - 2ma \sin\beta = N_1' \\ N_1' \sin\beta = N_2' \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow$

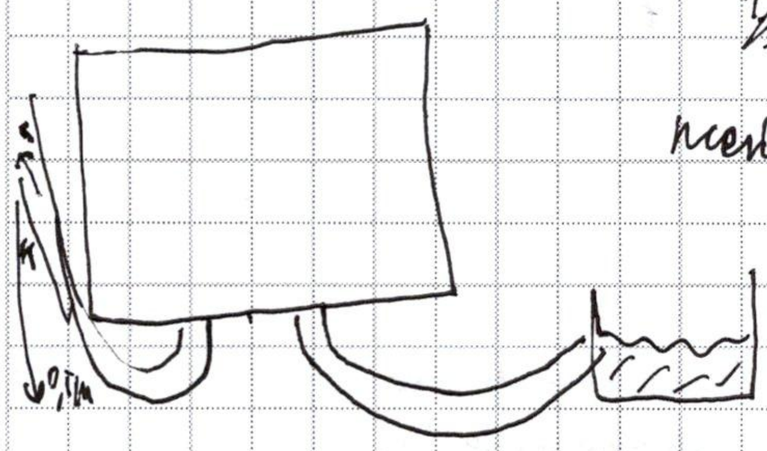
$\Rightarrow \sin\beta (m_1 g \cos\beta - 2m_1 a \sin\beta) = \sin\alpha (m_2 g \cos\alpha + 2ma \sin\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{m_1 g \cos\beta \sin\beta - m_2 g \sin\beta \cos\alpha}{2m(\sin^2\beta + \sin^2\alpha)} = \frac{2\cos\beta \sin\beta - \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\beta + \sin^2\alpha)} =$

$= \frac{2\cos\beta \sin\beta - \sqrt{3}\sin\beta\cos\alpha}{4(\sin^2\beta + \sin^2\alpha)} g = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{4\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} \cdot 10 = 0{,}5\ м/с^2$

Ответы: 1.) $\frac{\sqrt{3}}{2} m \approx 0{,}87\, m$; 2.) $0{,}5\ м/с^2$

Задача № 4



1.) Условие: P_1 - давление внутри сосуда, T_1 - температура дна, T_2 - ~~дна~~ почвы, P_2 - почвы, ρ - плотность воды, $H = 0,5$ метра.

~~1.) Закачали полную воду дна. P_1 ~~воды~~ в сосуде должно быть равно давлению воды, P_0.~~

~~2.) По закону Шарля: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$, дна~~

~~3.) Давление почвы будет~~

1.) По закону Шарля: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow$ Т.к. видно, что $T_2 < T_1$, $P_2 < P_1$.

2.) Закачали в насос полную воды почвы, тогда Минимальное давление в сосуде, $P_{2\,мин} = P_0$ (вода находится на уровне клапана)

3.) Давление P_1, должно поднять воду на высоту $H \Rightarrow$

минимальное P_1, $P_{1\,мин} = \rho g H + P_0$. Отсюда: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Leftrightarrow \frac{\rho g H + P_0}{T_1} = \frac{P_0}{T_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2 = \frac{P_0}{\rho g H + P_0} = T_1 = T_2 \cdot \frac{\rho g H + P_0}{P_0} = (5 + 273)\,К \cdot \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,5 + 10^5}{10^5} \approx 292,9\,К = 18,9^\circ C$

Ответ: 278 Ответ: 18,9°C